Theoretische Physik I

Hausübung, Blatt 13 **WS 03/04 Abgabetermin: 27.01.04**

[H36] Radialsymmetrische Ladungsverteilung **(1+1+1 Punkte)**

Eine radialsymmetrische Ladungsverteilung sei mit $\lambda(t)$ zeitlich veränderlich und habe die Form

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0\,\lambda(t)\,\frac{1}{r}\,e^{-\lambda(t)r^2} \qquad \text{mit} \qquad r = |\vec{r}|\ ,$$

wobei ρ_0 konstant ist.

(a) Wie groß ist die aus $\rho(\vec{r},t)$ folgende Gesamtladung?

(b) Berechnen Sie die zu $\rho(\vec{r},t)$ gehörende Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$.

(c) Bestimmen Sie $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$.

Hinweis: Nützen Sie die radiale Symmetrie des Problems aus, um $\vec{j}$ und $\vec{E}$ geeignet anzusetzen.

[H37] Rotierende Punktladung **(1+1+1 Punkte)**

Sei $c = 1$. Eine Ladung q bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf einer Kreisbahn mit dem Radius a. Es gelte $\omega a \ll 1$. Berechnen Sie für große Abstände von der Ladung, d.h. $r = |\vec{r}| \gg a$ (Dipolnäherung)

(a) die Felder $\vec{B}(\vec{r},t)$ und $\vec{E}(\vec{r},t)$

(b) das zeitliche Mittel des Poynting-Vektors

(c) das zeitliche Mittel der abgestrahlten Leistung.

Hinweis: Es gilt $\vec{B}(\vec{r},t) = \ddot{\vec{p}}(t_{\text{ret}}) \times \vec{e}_r/(4\pi r)$ und $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t) \times \vec{e}_r$, wobei $t_{\text{ret}} = t - r$ die retardierte Zeit ist.

Bitte wenden!

[H38] Poissongleichung **(4 Punkte)**

Gegeben sei eine Punktladung q am Punkt $\vec{r}_0 = (\rho_0, \varphi_0, z_0)$ (in Zylinderkoordinaten) innerhalb eines Zylinders, welcher durch

$$\Omega = \{(\rho, \phi, z) \,|\, \rho \in [0, a], \varphi \in [0, 2\pi), z \in [0, L]\}$$

definiert ist. Unter der Annahme, daß das Potential auf dem Rand des Zylinders verschwindet, d.h. $\phi(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0 \;\forall \vec{r} \in \partial\Omega$, zeigen Sie, daß das Potential $\phi(\vec{r}, \vec{r}_0)$ innerhalb des Zylinders durch

$$\phi(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{2q}{\pi L a^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}m(\varphi - \varphi_0)} \sin(\frac{k\pi z}{L}) \sin(\frac{k\pi z_0}{L}) J_m(\frac{x_{mn}\rho}{a}) J_m(\frac{x_{mn}\rho_0}{a})}{[(x_{mn}/a)^2 + (k\pi/L)^2] J_{m+1}^2(x_{mn})}$$

gegeben ist. Hierbei ist x_{mn} die n-te Nullstelle der Besselfunktion $J_m(x)$.

Hinweise: Betrachten Sie zunächst die Eigenwertgleichung

$$\triangle \phi_{\{\ell\}} + \lambda_{\{\ell\}}^2 \phi_{\{\ell\}} = 0$$

für den Laplaceoperator, wobei die $\phi_{\{\ell\}}$ einen vollständigen (orthonormierten) Funktionensatz (parametrisiert durch $\{\ell\} = \{n, k, m\}$) bilden. Lösen Sie die Eigenwertgleichung mit Hilfe eines geeigneten Separationsansatzes. Dann gilt für die Greensche Funktion (warum?)

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\sum_{\{\ell\}} \frac{\phi_{\{\ell\}}(\vec{r}) \phi_{\{\ell\}}^*(\vec{r}_0)}{\lambda_{\{\ell\}}^2} \; .$$

Hierin bedeutet "$*$" komplexe Konjugation.

Klausurtermin: 31. Januar, 10:00-13:00 Uhr, Appelstraße 9A, Hörsaal MZ1

Vorlesung: O. Lechtenfeld - Übungen: M. Wolf